FDL

Der Doppler-Effekt

Referat für den Physik-LK

Gliederung

- Informelle Vorstellung des Doppler-Effektes
- Herleitung beider Doppler-Phänomene
  - Verbindung zu einer Formel
  - Rechenbeispiel
- Akustischer Doppler-Effekt
- Schallmauer und der Wolkenscheiben-Effekt
- Transversaler Doppler-Effekt und die Relativitätstheorie
- Optischer Doppler-Effekt
- Herleitung der vektoriellen Darstellung des Doppler-Effekts
  - Rechenbeispiele

Was ist der Doppler-Effekt?

Als Doppler-Effekt bezeichnet man die Veränderung der wahrgenommenen bzw. gemessenen Frequenz von Wellen jeder Art, während sich die Quelle und der Beobachter einander nähern oder voneinander entfernen, d.h. relativ zueinander bewegen. (Wikipedia)

2 Phänomene

- Existenz bzw. Nicht-Existenz eines Trägermediums für die Wellen, z.B.
  - Luft oder Wasser
  - Fehlen eines Trägermediums bei der Ausbreitung von Licht
- Wenn ein Trägermedium vorhanden ist, ist es relevant, **wer** sich bewegt.
- Es gibt eigentlich 2 Doppler-Effekte

  a) Sender bewegt sich

  b) Empfänger bewegt sich

Herleitung (Grundlegendes)

- Zusammenhang zwischen Wellenlänge, Frequenz und Phasengeschwindigkeit:

  $$\lambda * f = c$$

- Wellengleichung (Δs bezeichnet die Entfernung zwischen Sender und Empfänger):

$$A(t) = A_0 \sin\left(\phi(t)\right) = A_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{\Delta s}{c}\right) + \Delta\varphi\right)$$

Herleitung (Grundlegendes II)

- Definition der Winkelgeschwindigkeit und Erweiterung auf den nicht-linearen Bereich:

$$\overline{\omega} := \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \rightarrow \omega = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$$

- Zusammenhang zwischen Frequenz und Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega := 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Herleitung (Grundlegendes III)

- Als Erweiterung des bisherigen, statischen Frequenzbegriffes kann man also nun benutzen:

$$f = \frac{\dot{\phi}}{2\pi} \Leftrightarrow f(t) = \frac{\phi'(t)}{2\pi}$$

Herleitung (Ruhender Sender, bewegter Empfänger)

- **v** ist die Geschwindigkeit des Empfängers, der sich geradlining auf den Sender **zubewegt**
- Δs ändert sich also mit der Zeit:

$$\Delta s(t) := \Delta s(0\mathrm{s}) - vt$$

Herleitung (Ruhender Sender, bewegter Empfänger II)

- Daraus folgt:

$$\phi(t) = \omega_0 \left(t - \frac{\Delta s(0) - vt}{c} \right) + \Delta \varphi$$

$$\phi(t) = \omega_0 \left(t + \frac{v}{c} t - \frac{\Delta s(0)}{c} \right) + \Delta \varphi$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \left(1 + \frac{v}{c} \right) = f_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

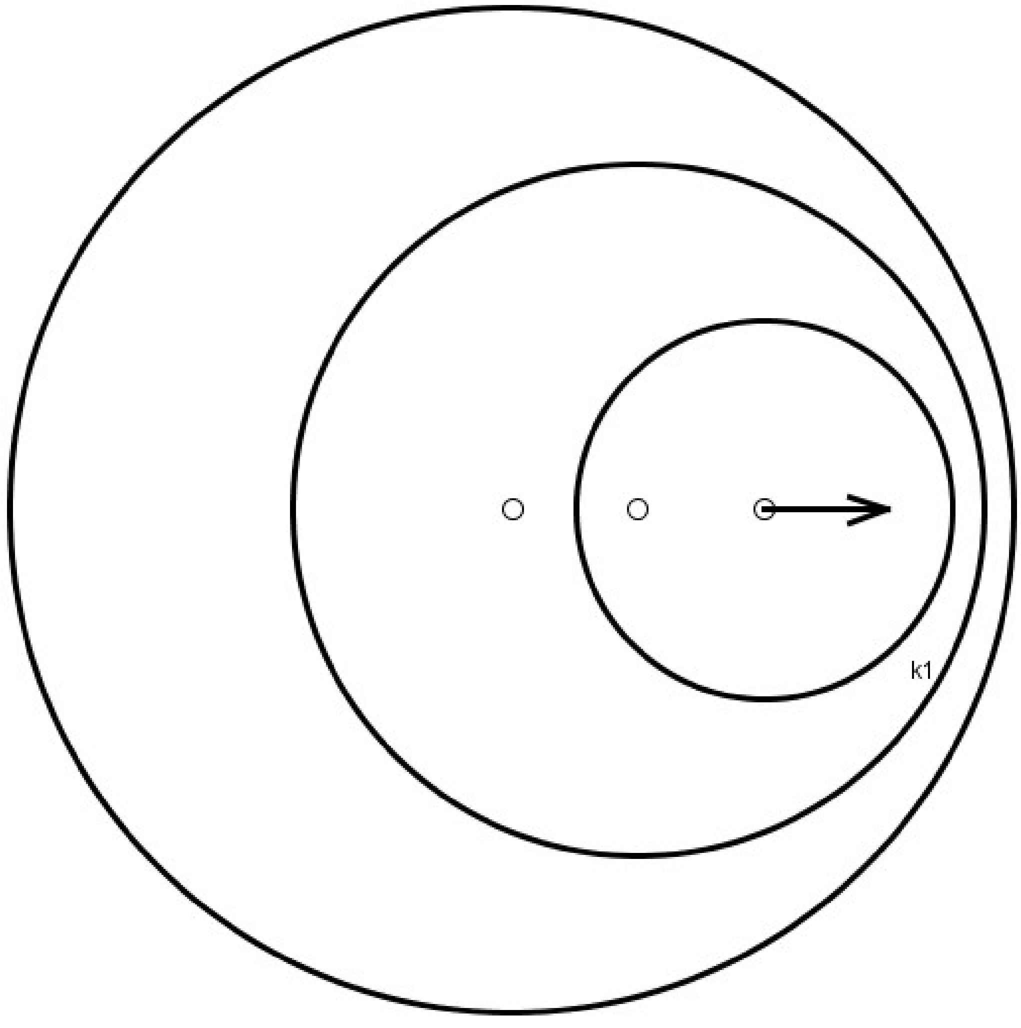
Herleitung (Bewegter Sender, ruhender Empfänger)

- Mit **u** wird die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich der Sender auf den Empfänger zu bewegt
- Daraus folgt für Δs:

$$\Delta s(t)=\Delta s(0\mathrm{s})-ut$$

- Außerdem ändert sich die Wellenlänge:

Herleitung (Bewegter Sender, ruhender Empfänger II)



Herleitung (Bewegter Sender, ruhender Empfänger III)

- Sie wird in Bewegungsrichtung kleiner und in Gegenrichtung größer:

$$\lambda = \lambda_0 - u \underbrace{T_0}_{T_0 = \frac{1}{f_0}} = \frac{c}{f_0} - \frac{u}{f_0} \Rightarrow \frac{c}{f} = \frac{c}{f_0} - \frac{u}{f_0}$$

$$c\, f_0 = f\left(c - u\right) \Leftrightarrow f = f_0 \frac{c}{c-u} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{u}{c}}$$

Herleitung (Bewegter Sender, ruhender Empfänger IV)

- Man kann f auch wieder über die Winkelfunktion herleiten:
  - Dazu muss benutzt werden, dass (im Bezugssystem des Senders) die Phasengeschwindigkeit $c_{rel} = c - u$ vorliegt
- Also lautet die Winkelfunktion:

$$\phi(t) = \omega_0 \left(t - \frac{\Delta s(t)}{c_{rel}} \right) + \Delta\varphi = \omega_0 \left(t - \frac{\Delta s(t)}{c - u} \right) + \Delta\varphi$$

Herleitung (Bewegter Sender, ruhender Empfänger V)

- Damit ergibt sich:

$$\phi(t)=\omega_0\left(t-\frac{\Delta s(0\mathrm{s})-ut}{c-u}\right)+\Delta\varphi=$$

$$=\omega_0\left(t+\frac{u}{c-u}t-\frac{\Delta s(0\mathrm{s})}{c-u}\right)+\Delta\varphi$$

$$\Rightarrow\phi'(t)=\omega_0\left(1+\frac{u}{c-u}\right)=\omega_0\left(\frac{c-u+u}{c-u}\right)=\omega_0\left(\frac{c}{c-u}\right)=$$

$$=\omega_0\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\Rightarrow f=\frac{f_0}{1-\frac{u}{c}}$$

Herleitung (beide bewegen sich)

- Sei **u** wieder die Geschwindigkeit des Senders und **v** die des Empfängers, dann folgt:

$$\Delta s(t) = \Delta s(0\mathrm{s}) - (v+u)t$$

Herleitung (beide bewegen sich)

- Für die Winkelfunktion ergibt sich dann:

$$\phi(t) = \omega_0 \left(t - \frac{\Delta s(0) - (v+u)t}{c-u} \right) + \Delta\varphi$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \omega_0 \left(1 + \frac{v+u}{c-u} \right) = \omega_0 \frac{c-u+v+u}{c-u} = \omega_0 \frac{c+v}{c-u} =$$

$$= \omega_0 \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{u}{c}} \Rightarrow f = f_0 \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{u}{c}}$$

Zusammenfassung

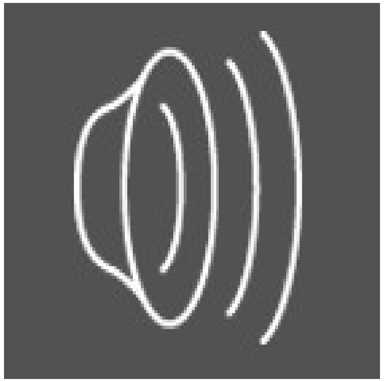
- Die allgemeine Formel lautet also:

$$f = f_0 \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{u}{c}} = f_0 \frac{c+v}{c-u}$$

Akustische Doppler-Effekt

Beispiele:

- Krankenwägen
- Formel 1
- Radar



Rechenbeispiel I

Ein Klavier mit einer Frau, die darauf spielt, fährt (wie in einem Musikvideo) durch eine Stadt mit 80km/h. Welche Frequenz hört ein Beobachter, wenn die Frau den Kammerton *a* (440 Hz) anschlägt, wenn das Klavier

a) auf ihn zufährt

b) wegfährt bzw vorbeigefahren ist

oder, wenn der Beobachter

c) auf das Klavier mit 20km/h zurennt?

Rechenbeispiel I/Musterlösung

$$\text{Formel: } f = f_0 \frac{c+v}{c-u}$$

$$u = 80\frac{km}{h} = 22\frac{m}{s}\,;\, v = 20\frac{km}{h} = 5{,}56\frac{m}{s}$$

$$\text{a) } f = \frac{440\,Hz * 330\frac{m}{s}}{330\frac{m}{s} - 22\frac{m}{s}} \approx 471\,Hz \quad \text{b) } f = \frac{440\,Hz * 330\frac{m}{s}}{330\frac{m}{s} + 22\frac{m}{s}} \approx 413\,Hz$$

$$\text{c) } f = \frac{440\,Hz * 330\frac{m}{s} + 5{,}56\frac{m}{s}}{330\,m - 22\frac{m}{s}} \approx 480\,Hz$$

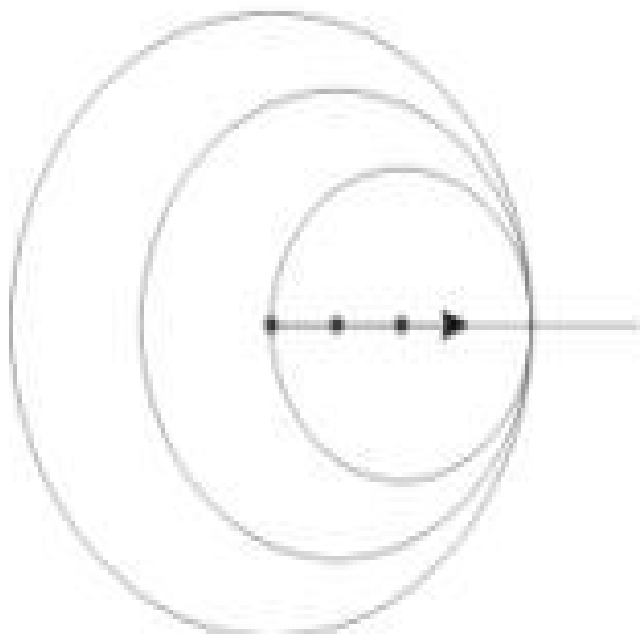
Überschallflug, Schallmauer und Mach'scher Kegel

- Entstehung des Überschallknalls:

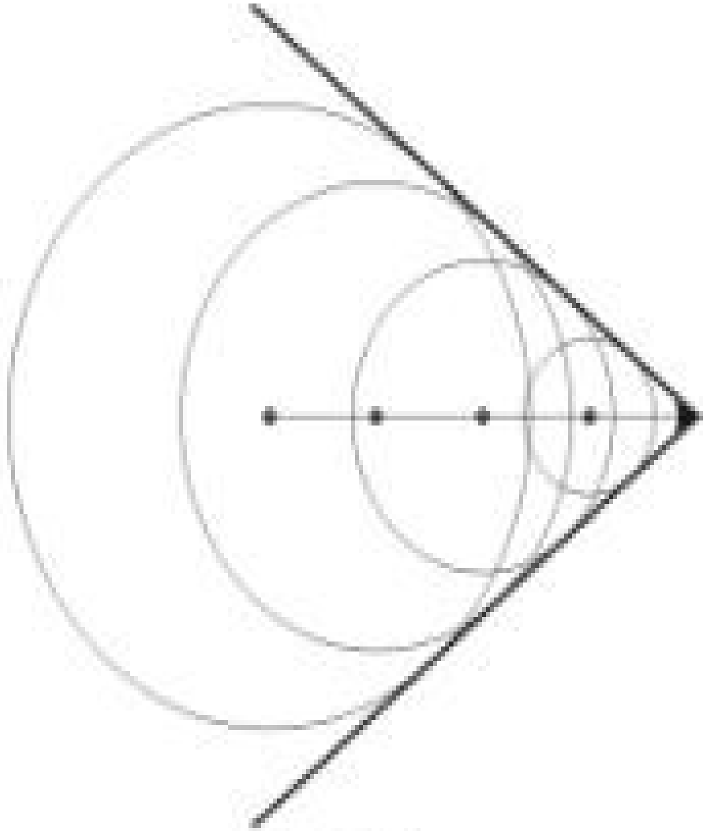
$$f = f_0 \frac{c+v}{c-u}$$

  - Wenn u gegen c geht, geht f gegen unendlich. D.h. das die Wellenlänge gegen 0 geht, die vom Flugzeug erzeugten Schallwellen werden also immer weiter komprimiert.

Überschallflug, Schallmauer und Mach'scher Kegel II



$v = v$



$v > v$

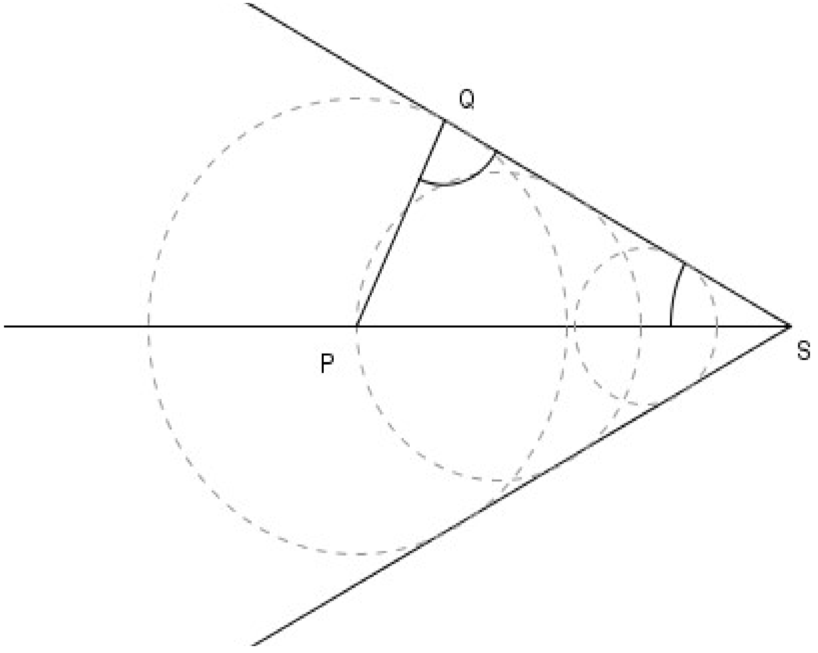
Überschallflug, Schallmauer und Mach'scher Kegel III

- Beim Überschreiten der Schallgeschwindigkeit können die Schallwellen nicht mehr aufschließen und sie bilden stattdessen den sog. Mach'schen Kegel, entlang dessen der Überschallknall zu hören ist.
- Es ist also **nicht** ein **einziger** Knall, sondern „er“ ist für jeden Beobachter zu einer anderen Zeit zu hören.

Überschallflug, Schallmauer und Mach'scher Kegel IV

- Der halbe Öffnungswinkel heißt „Mach'scher Winkel“, er berechnet sich wie folgt:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PS}} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$$



Überschallflug, Schallmauer und Mach'scher Kegel V

Außer dem Überschallknall gibt es noch ein weiteres Phänomen, dass seine Existenz der plötzlichen Druckänderung verdankt:

Der Wolkenscheiben-Effekt

Wolkenscheibeneffekt

- Wir wissen aus der Mittelstufe:

$$\frac{pV}{T} = const.$$

- V ändert sich nicht, d.h. $p_1 < p_2 \Rightarrow T_1 < T_2$
- Der spontane Druckabfall beim Überschallknall kann dazuführen, dass die Temperatur hinter dem Flugzeug schlagartig unter den Gefrierpunkt fällt und in humiden Gebieten die Luftfeuchtigkeit als Wolke kondensiert.

Doppler-Effekt unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie

- Wir wissen:

$$t_{bewegt} = t_{beobachtet}\,\gamma = t_{beobachtet}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

- Nehmen wir an, der Beobachter ist in Ruhe und der Sender bewegt sich, dann gilt nach der „normalen" Formel:

$$f_{\text{beobachtet + doppler}} = f_{beobachtet}\,\frac{c}{c-v}$$

Doppler-Effekt unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie II

- Zusätzlich läuft die Zeit für den Sender (von unserer Warte aus) um den Faktor γ verlangsamt.
- Zwischen Frequenz und Periodendauer besteht bekanntlich folgender Zusammenhang:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f_{bewegt} = \frac{1}{T_{bewegt}} = \frac{1}{T_{beobachtet}\,\gamma} = \frac{f_{beobachtet}}{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$f_{beobachtet} = f_{bewegt}\,\gamma$$

Doppler-Effekt unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie II

- Setzen wir die Formel für die beobachtete Frequenz ein und wir erhalten:

$$f_{\text{beobachtet + doppler}} = f_{beobachtet} \frac{c}{c-v} =$$

$$= f_{bewegt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{0.5} \frac{1}{(1-\frac{v}{c})} = f_{bewegt} \left(\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)} \right)^{0.5} =$$

$$= \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{0.5} f_{bewegt}$$

Transversaler Effekt

- Bei Bewegungen quer zum Beobachter (also äquidistante Bewegungen), würde ja an sich kein Doppler-Effekt auftreten, da aber bei jedem bewegten Objekt Zeitdilatation auftritt, muss auch hier die Frequenz angepasst werden:

$$f_{beobachtet} = f_{bewegt} \left(1 - \frac{{v_{\perp}}^2}{c^2} \right)^{0.5}$$

Optischer Doppler-Effekt

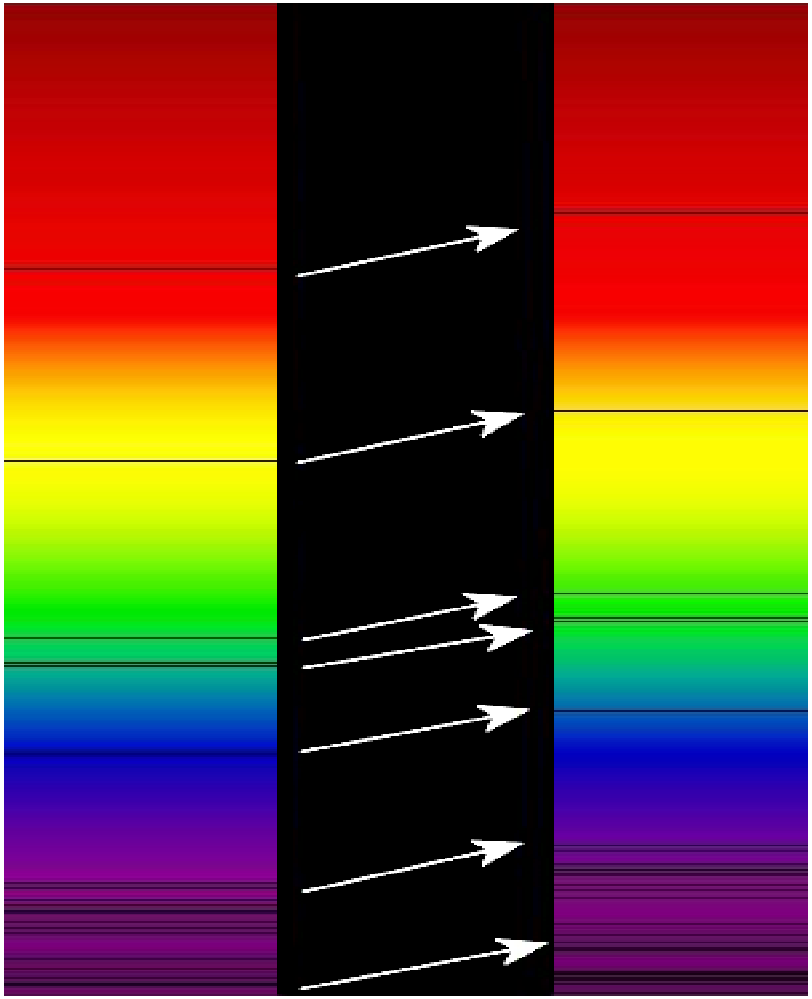
- Auch beim Licht mit seinem Wellencharakter tritt der Doppler-Effekt ein, im Gegensatz zu Schallwellen ist jedoch kein Medium vorhanden, d.h. es gibt nur eine Formel zur Berechnung und keine Unterscheidung zwischen bewegtem und ruhenden Objekt.
- Man benutzt (logischerweise) die Formel für den relativistische Doppler-Effekt.

Beispiel für den optischen Doppler-Effekt

Die Rotverschiebung des Lichtes von weit-entfernten Galaxien ist wohl das beste und bekannteste Beispiel für den optischen Doppler-Effekt.

Das Universum expandiert ständig und die Galaxien driften auseinander. Diese Bewegung führt zu einer Rotverschiebung (niedrigere Frequenz) des von dort ausgesandten Lichtes.

Beispiel für die Rotverschiebung



Herleitung einer vektoriellen Beschreibung des Doppler-Effekts I

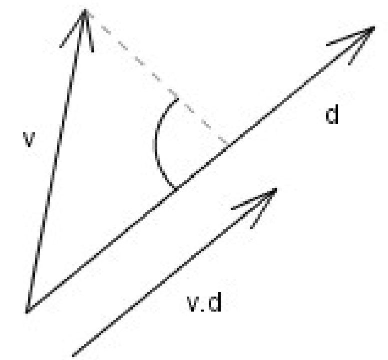
- Sei $\vec{E}(t)$ eine Vektorfunktion, die den Ortsvektor des Empfängers liefert und $\vec{S}(t)$ eine Vektorfunktion, die den Ortsvektor des Senders liefert.
- Der Gangunterschied ergibt sich dann durch:

$$\Delta s(t) = \|\vec{d}(t)\| = \|\vec{E}(t) - \vec{S}(t)\|$$

Herleitung einer vektoriellen Beschreibung des Doppler-Effekts II

- Definition des Punktproduktes:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} \cdot \vec{b} = \|a\| \|b\| \cos \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b} \right) =$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



- Die Phasengeschwindigkeit (im Bezugssystem des Senders) ergibt sich aus dem Punktprodukt:

$$c_{rel}(t) = c - \frac{\vec{d}(t) \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}(t)}{\|\vec{d}(t)\|}$$

Herleitung einer vektoriellen Beschreibung des Doppler-Effekts III

- Die Winkelfunktion sieht also wie folgt aus:

$$\phi(t) = \omega_0 \left(t - \frac{\Delta s(t)}{c_{rel}(t)} \right) + \Delta\varphi \Rightarrow \phi'(t) = \omega_0 \left(1 - \frac{d}{dt} \frac{\Delta s(t)}{c_{rel}(t)} \right)$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \omega_0 \left(1 - \frac{\Delta s'(t) c_{rel}(t) - \Delta s(t) c_{rel}'(t)}{c_{rel}^2(t)} \right)$$

$$f = \frac{\dot{\phi}}{2\pi} \Rightarrow f(t) = f_0 \left(1 - \frac{\Delta s'(t) c_{rel}(t) - \Delta s(t) c_{rel}'(t)}{c_{rel}^2(t)} \right)$$

Beispiel

$$\vec{S}(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix};\vec{E}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{d}(t)=-\vec{S}(t)\wedge\|\vec{d}(t)\|=1$$

$$\frac{d\,S(t)}{d\,t}=\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

$$c_{rel}(t)=c-\frac{\vec{d}(t)\cdot\frac{d\,\vec{S}}{d\,t}(t)}{\|\vec{d}(t)\|}=c-\frac{-\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}}{1}$$

Beispiel II

$$c_{rel}(t) = c - \frac{\vec{d}(t) \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}(t)}{\|\vec{d}(t)\|} = c - \frac{-\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}{1}$$

$$c_{rel} = c + (-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t)) = c$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \omega_0 \left(t + \frac{1}{c} \right) + \Delta\varphi$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t) = \omega_0$$

$$f(t) = f_0$$

Zusammenfassung der vektoriellen Darstellung

$$\Delta s(t) = \|\vec{d}(t)\| = \|\vec{E}(t) - \vec{S}(t)\|$$

$$c_{rel}(t) = c - \frac{\vec{d}(t) \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}(t)}{\|\vec{d}(t)\|}$$

$$f(t) = f_0 \left(1 - \frac{d}{dt} \frac{\Delta s(t)}{c_{rel}(t)} \right)$$

Aufgabe

Im 2. Weltkrieg erkannte man einen Bombenangriff oft an dem typischen Pfeifton der Bomben. Eine 500kg Bombe fällt aus 1000m Höhe aus einem 400 km/h schnellen Flugzeug. Berechne den Modulationsfaktor in Abhängigkeit der Zeit für den Fall, dass der Beobachter sich am Aufschlagspunkt der Bombe befindet.

Lösung

- Viel Spaß beim Selberlösen..
- Nur so viel:

$$\vec{S}(t)=\begin{pmatrix} 400\,\frac{km}{h}\,t \\ -\frac{1}{2}\,9{,}81\,\frac{m^2}{s}\,t^2 \end{pmatrix};\; t_1=\sqrt{\frac{-2*1000\,m}{9.81\,\frac{m^2}{s}}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t)=\begin{pmatrix} 400\,\frac{km}{h}\,t_1 \\ -1000\text{m} \end{pmatrix}$$

Feedback

- Noch Fragen?
- Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Quellen

- Wikipedia (http://www.wikipedia.de)
- „Der Doppler-Effekt: Erklärung, Herleitung und Überprüfung mit Hilfe von pendelnder Schallquelle und Empfänger“ (http://www.naggel.com/~hendrik/2004/facharb)
- Graphen: mit freundlicher Genehmigung von Rudolf Polzer